# Aufgabenbeispiel zur Kurvendiskussion

(1) Definitionsbereich

(2) Achsenschnittpunkte

(3) Grenzwerte für x -> + ∞ ∧ x-> - ∞

Grenzwertverhalten an den Polstellen

Ableitungen

(6) Extrempunkte

(7) Polynomdivision -> Asymptotengleichung

1.Beispiel : f(x) = (x^2-4)/(x-1)

(1) Definitionsbereich

D(f) = R \ {1}

Bedingung : $x-1 \neq 0$

$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Achsenschnittpunkte

*Schnittpunkte mit x-Achse*

Bedingung : f(x) = 0

$x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$ (Auflösen nach x)

oder

$x^2-4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$ (Binomische Formeln)

$\Rightarrow S_{x1}(-2;0) \wedge S_{x2}(2;0)$

*Schnittpunkte mit y-Achse*

Bedingung : $x = 0$

$f(0) = (0^2-4)/(x-1) = -4/-1 = 4$

$\Rightarrow S_y(0;4)$

Grenzwerte für $x \to -\infty \wedge x \to +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-4/x)}{x(1-1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4/x}{1-1/x} \; [= \infty/1] = +\infty$$

oder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-4/x^2}{1/x-1/x^2} \; [= 1/0] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \; [= -\infty/1] = -\infty$$

*Folgerung :* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Grenzwertverhalten an den Polstellen

$$\text{l-lim}_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)^2-4}{(1-h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1-2h+h^2-4}{-h} \; [ = -3/-h] = \infty$$

$$\text{r-lim}_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-4}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-4}{h} \; [ = -3/h] = -\infty$$

*Folgerung :* Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$ besitzt eine Unendlichkeitsstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - an der Stelle x=1

## Ableitungen

*1.Ableitung*

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2-4)1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x+4}{(x^2-2x+1)}$$

*2.Ableitung*

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x+1)-(x^2-2x+4)(2x-2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-6x+6}{(x-1)^4} = \frac{-6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-6}{(x-1)^3}$$

*3.Ableitung*

$$f'''(x) = \frac{18}{(x-1)^4}$$

## Extrempunkte

notwendige Bedingung : $f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+4 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{1-4}$ nicht definiert

$x_2 = 1 - \sqrt{1-4}$ nicht definiert

$LL = \{ \}$

*Folgerung :* Es gibt keine Hoch- oder Tiefpunkte

## Asymptotengleichung

$(x^2-4) : (x-1) = x+1 + (-3)/(x-1)$

$\underline{-(x^2-x)}$

$x-4$

$\underline{-(x-1)}$

$-3$

$(x^2-4) : (x-1) = x+1 + (-3)/(x-1)$

$\Leftrightarrow (x^2-4)/(x-1) = x+1 - 3/(x+1) = f(x)$ ¦ $-(x+1)$

↓ ↓

$f(x)$ $g(x) \to 0 (x \to \pm \infty)$

Behauptung : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$

Beweis : $\frac{x^2-4}{x-1} - (x-1) = -\frac{3}{x-1}$

$\downarrow$

$f(x) - g(x) = -\frac{3}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{3}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \Big| \; +[\lim\limits_{x\to\infty} g(x)]$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$